Problème : (8 points)

I) Considérons la fonction numérique f définie sur R telle que

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x - x & ,x > 0 \\ f(x) = xe^{x^2-x} & ,x \le 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ où $\|\vec{i}\| = 1cm$

0.5 1) Montrer que f est continue en 0

0.5 2)a) Montrer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu

0.5 b) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

0.5 3) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

0.25 b) interpréter géométriquement le résultat obtenu

0.5 4) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et Déduire que $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

0.75 5)a) Monter que $\begin{cases} f'(x) = \ln(x) & ,x > 0 \\ f'(x) = (2x^2 - x + 1)e^{x^2-x} & ,x < 0 \end{cases}$

0.5 b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.25 6) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution α tel que : $4 < \alpha < 5$

0.75 avec $f(4) = 1,54$ et $f(5) = 3,04$

7) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$

8) soit la fonction numérique h restriction de f sur $[1;+\infty[$

0.5 a)Montrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$ h admet une fonction réciproque h^{-1} sur J en déterminant J

0.25 b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ où $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ la courbe représentative de la fonction h^{-1} dans le même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

0.5 9)a) Montrer que $(h^{-1})'(2) = \frac{\alpha}{2+\alpha}$

0.5 b) Trouver avec deux méthodes différentes $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{h^{-1}(x)}{x}$

II)

0.5 1) en utilisant intégration par partie calculer $\int_1^e x\ln(x) - x\,dx$

0.75 2) calculer l'Air entre $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les deux droites dont leurs équations sont $x=1$ et $x=e$.

Exercice 10 : (EXAMEN 2023 ORDINAIRE)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

- A :"la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 »
- B: "le produit ab est égal à 2"

1) a) Calculer $p(A)$ la probabilité de l'événement A

   b) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

2) Calculer $p(A/B)$ probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

   a) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

   b) Donner la loi de probabilité de X

   (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

   c) On considère les événements

   - M : " Le produit ab est pair non nul "
   - N : " le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables

SERIE D

EXERCICE 1

1. On considère, dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation :(E) : $z^2 - 4z + 8 = 0$.

   a) Résoudre l'équation (E).

   b) Écrire la solution dont la partie imaginaire est négative sous la forme trigonométrique.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A etB d'affixes respectives $2 - 2i$ et$2 + 2i$.

   a) Écrire sous forme algébrique, le complexe $u = \frac{z_B}{z_A}$.

   b) En déduire la nature du triangle OAB.

3 On considère l'application f du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M d'affixez associe le point M' d'affixez' tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

   a) Préciser la nature de f.

   b) Écrire sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique, l'affixe $z_{A'}$ du pointA' tel que $A' = f(A)$.

   c) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 2

Un sac contient 5 boules bleues, 3 boules jaunes et 2 boules rouges indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise, trois boules du sac.

1) Déterminer le nombre de cas possibles.

2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « Tirer une boule bleue, puis une boule jaune, puis une boule rouge »

   B : « Tirer une boule bleue et une boule jaune et une boule rouge »

3) Soit X La variable aléatoire associé au nombre de couleurs dans chaque tirage.

   a) Déterminer les valeurs de X.

   b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   c) Calculer E(X) ; V (X) et σ(X).

4) Déterminer et représenter la courbe de la fonction répartition$F(X)$.