Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$a \star b = a + b - ab \quad \text{et} \quad a \top b = a + b - 1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur G, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt
2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1 - x.$
   - **(a)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *dans* $(G, \star)$ ....0.5 pt
   - **(b)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R}, \top)$ ....0.5 pt
   - **(c)** *En déduire la structure* $(G, \star)$, *et l'inverse de tout élément a de* $(G, \star)$. ....0.5 pt
3. *Montrer que* $(]-\infty, 1[, \star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G, \star)$. ....0.5 pt
4. *Montrer que* $(\mathbb{R}, \top, \star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\, fois}$.

   Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \;\middle|\; M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble E est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. ....0.25 pt
2. *Montrer que* $(E, \times)$ *et* $(G, \star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E, \times)$. ....0.5 pt
3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt
4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que F est un sous groupe* $(E, \times)$. ....0.5 pt

---

$a * b = a + b - ab$

1) Soient $a, b \in G$

Mq $a * b \in G$ càd $a*b \neq 1$

$a*b - 1 = a + b - ab - 1$

$= a(1-b) + (b-1)$

$= (b-1)(1-a)$

on a $a \in G$ et $b \in G$

donc $a - 1 \neq 0$ et $b - 1 \neq 0$

donc $a * b - 1 \neq 0$

c.à.d $a * b \in G$

donc $*$ est L.c.i dans .

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 1 - x$

(a) Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$

$f(a \times b) = 1 - ab$

$f(a) * f(b) = f(a) + f(b) - f(a) \cdot f(b)$

$= (1-a) + (1-b) - (1-a)(1-b)$

$= 1 - ab = f(a \times b)$

d'ou f est un homomorphisme

de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

et on a $f(0) = 1$

d'ou f est un isom

de $\mathbb{R}^*$ vers G

(b) $f(a + b) = f(a) \top f(b)$

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a \star b = a + b - ab \quad \text{et} \quad a \top b = a + b - 1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur G, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt
2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1 - x$.
   - **(a)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt
   - **(b)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt
   - **(c)** *En déduire la structure* $(G,\star)$, *et l'inverse de tout élément a de* $(G,\star)$. ....0.5 pt
3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt
4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\ fois}$.

   Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \;\middle|\; M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble E est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt
2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt
3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt
4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que F est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

c) On a $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{R},+)$.
sont des groupe comme
et f est iso de $(\mathbb{R}^*,\times)$ entre $(G,\star)$
et f : $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{K},\top)$

$x \mapsto x^{-1}$

$x \mapsto -x$

Alors $(G,\star)$ et $(\mathbb{K},\top)$
sont des Groupe commutatifs

Soit $a \in G$ déterminons a' : le symétrique de a

$a \in G$ donc $\exists x \in \mathbb{R}^*$ tq $f(x) = a$ cad $1-x=a$
c.a.d
a' le symét

$(a)' = (f(x))'$

$= f(x^{-1})$ (car f est isom de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(G,\star)$)

$= f\left(\frac{1}{x}\right)$

$= 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{1-a} = \frac{-a}{1-a}$

$= \frac{a}{a-1}$

le symétrique de a est $\frac{a}{a-1}$

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$a \star b = a + b - ab \quad \text{et} \quad a \top b = a + b - 1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur* G*, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt
2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1 - x$.
   (a) *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt
   (b) *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt
   (c) *En déduire la structure* $(G,\star)$*, et l'inverse de tout élément* a *de* $(G,\star)$. ....0.5 pt
3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt
4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\ fois}$.

   Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \;\middle|\; M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble* E *est stable dans* $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt
2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt
3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt
4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que* F *est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

3) on $]-\infty,1[\subset G$
et $]-\infty,1[\neq \emptyset$ car $0 \in]-\infty,1[$

soient a et $b \in]-\infty,1[$
Mq $a * b' \in]-\infty,1[$ avec b' le symétrique de b dans $(G,*)$

E s.g de $(G,\times)$
. $E \neq \emptyset$
$E \subset G$
$\forall a,b \in G$
$a * b' \in G$

b' symétrique de b dans $(G,*)$

$$a * b' - 1 = a + b' - ab' - 1$$
$$= a + \frac{b}{b-1} - a\left(\frac{b}{b-1}\right) - 1$$
$$= \frac{a(b-1) + b - ab - b + 1}{b-1}$$
$$= \frac{\cancel{ab} - a + \cancel{b} - \cancel{ab} - \cancel{b} + 1}{b-1}$$
$$= \frac{1-a}{b-1} \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} < 0$$

d'où $a * b' - 1 < 0$
$a * b' \in]-\infty,1[$
d'où $]-\infty,1[$ est un sous groupe $(G,*)$

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a \star b = a+b-ab \quad \text{et} \quad a \top b = a+b-1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur* G, *et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt
2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1-x$.
   - **(a)** *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt
   - **(b)** *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt
   - **(c)** *En déduire la structure* $(G,\star)$, *et l'inverse de tout élément* a *de* $(G,\star)$. ....0.5 pt
3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt
4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt
5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a\star a\star\cdots\star a}_{n\ fois}$.

   Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \quad | \quad M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble* E *est stable dans* $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt
2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt
3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt
4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que* F *est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

$(K,*,T)$ corps commutif

$\Longleftrightarrow (K,*)$ G.C

$(K-\{e\},T)$ G.C (e élément neutre de $*$ $\quad (\mathbb{R},+,\times)$

T distributive

4) On a $(\mathbb{R},T)$ G.C (d'après 3)

et $(\mathbb{R}-\{1\},*)$ c.a.d $(G,*)$ groupe comm

$a*(b\,T\,c) = (a*b)\,T\,(a*c)$ (du calcul)

donc $*$ est distri / à T

d'ou $(\mathbb{R},T,*)$ corps commutatif

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$a\star b=a+b-ab \quad \text{et} \quad a\top b=a+b-1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur G, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt
2. *On considère l'application* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R};\quad x\longmapsto 1-x.$
   - **(a)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt
   - **(b)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt
   - **(c)** *En déduire la structure* $(G,\star)$, *et l'inverse de tout élément a de* $(G,\star)$. ....0.5 pt
3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt
4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt
5. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $a\in G$. *On pose :* $a^{(n)}=\underbrace{a\star a\star\cdots\star a}_{n\text{ fois}}$.

   Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E=\left\{M(a)\ \middle|\ M(a)=\begin{pmatrix}1&a&a\\0&1-a&0\\0&0&1-a\end{pmatrix}\quad \text{avec}\quad a\in G\right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble E est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt
2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt
3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt
4. *On pose* $F=\{M(a)\quad a<1\}$. *Montrer que F est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

(5) $a^{(n)}=a\star a\star\cdots a$

soit $a\in G$ donc $\exists x\in\mathbb{R}^*$ tq $f(x)=a$

c.a.d $a=1-x$

$a^{(n)}=(f(x))^{(n)}$

$=f(x^n)$ (f est isom de $(\mathbb{R},\times)$ vers $(G,\star)$

$f(x\times y)=f(x)\star f(y)$

$f(x^2)=(f(x))^{(2)}$

$f(x^n)=(f(x))^{(n)}$

$=1-x^n$

$a^{(n)}=1-(1-a)^n$

$f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(E,\times)$

$(f(x))'=f(-x)$

$(f(x))^{(n)}=f(nx)$

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$a \star b = a + b - ab \quad \text{et} \quad a \top b = a + b - 1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur* G, *et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt

2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1 - x$.

(a) *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt

(b) *Montrer que* f *est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt

(c) *En déduire la structure* $(G,\star)$, *et l'inverse de tout élément* a *de* $(G,\star)$. ....0.5 pt

3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt

4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt

5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\ fois}$.

Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \;\middle|\; M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble* E *est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt

2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt

3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de* a *et de* n. ....0.25 pt

4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que* F *est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

Parte II

1) $E \neq \phi$ car pour $a = 0$

on a $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$

$E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soient $a, b \in G$

$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b & b \\ 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a*b & a*b \\ 0 & 1-a*b & 0 \\ 0 & 0 & 1-a*b \end{pmatrix} = M(a*b)$$

. $a*b \in G$

2) $g : G \longrightarrow E$
$a \longrightarrow M(a)$

$f(a*b) = M(a*b) = M(a) \times M(b)$
$= f(a) \times f(b)$

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$a \star b = a+b-ab \quad \text{et} \quad a \top b = a+b-1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur G, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. ....0.5 pt

2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1-x$.

- **(a)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*,\times)$ *dans* $(G,\star)$ ....0.5 pt
- **(b)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R},+)$ *dans* $(\mathbb{R},\top)$ ....0.5 pt
- **(c)** *En déduire la structure* $(G,\star)$, *et l'inverse de tout élément a de* $(G,\star)$. ....0.5 pt

3. *Montrer que* $(]-\infty,1[,\star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G,\star)$. ....0.5 pt

4. *Montrer que* $(\mathbb{R},\top,\star)$ *est un corps commutatif.* ....0.5 pt

5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\ fois}$.

Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \;\middle|\; M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble E est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. ....0.25 pt

2. *Montrer que* $(E,\times)$ *et* $(G,\star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E,\times)$. ....0.5 pt

3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de a et de n.* ....0.25 pt

4. *On pose* $F = \{M(a) \quad a < 1\}$. *Montrer que F est un sous groupe* $(E,\times)$. ....0.5 pt

---

$g : G \longrightarrow E$

Soit $M \in E$ cherchons $x \in G$ tq $g(x) = M$

On a $M \in E$ donc $\exists a \in G$ tq $M = M(a)$

$$g(x) = M \iff M(x) = M(a)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1- \end{pmatrix}$$

$$\iff x = a \in G$$

donc g est bijective

③ $g : (G,\star) \longrightarrow (E,\times)$

$a \longrightarrow M(a)$

$$(M(a))^n = M(a) \times M(a) \times \cdots \times M(a)$$

$$= g(a) \times g(a) \times \cdots g(a)$$

$$= g(a \star a \star \cdots \star a) = g(a^{(n)})$$

$$= g(1-(1-a)^n)$$

$$= M(1-(1-a)^n)$$

O.3.a f est continue et strictement
décroissante sur $\mathbb{R}$
d'où f est bijective de
$\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ fois}}}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt
2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a$ $\qquad (E)$.*
   Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt
4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt
5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

   (a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

   (b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt
6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

   (b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

   (c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

   (d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

   $$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

   Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
   Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

$a \in [\![1,5]\!] = [1,5] \cap \mathbb{N} = \{1, 2, \dots 5\}$

$U_n = \overline{aa \;\dots\dots\; a}^{(6)}$

1) $U_1 = a$

$U_2 = a + 6a$

$U_3 = a + 6a + 6^2 a$

$U_4 = a + 6a + 6^2 a + 6^3 a$

$\vdots$

$U_n = a + 6a + 6^2 a + \dots 6^{n-1} \cdot a$

2) $U_n = a\left(\sum_0^{n-1} 6^K\right)$

$= a\left(\dfrac{6^n - 1}{6 - 1}\right)$

$5U_n = a(6^n - 1)$

$S = \{(a + 5k, U_n + 6^n k)\}$

b) $6^n \cdot x - 5y = a$ (1)

On a $5U_n = a(6^n - 1)$

$\iff 6^n \cdot a - 5U_n = a$ (2)

(a, U_n) sol part de E

$6^n(x - a) = 5(y - U_n)$

$5 / 6^n(x - a)$

On a $5 \wedge 6 = 1$

$\iff 5 \wedge 6^n = 1$

et

donc $5 \mid x - a$

$x = a + 5K$

$y = U_n + 6^n K$

et reciproqt

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\ fois}{}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt
2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt
   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a$ $\quad (E)$.*
   Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt
4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt
5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*
   (a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt
   (b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt
6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt
   (b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt
   (c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt
   (d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

$U_n = \underbrace{\overline{a \cdots\cdots a}}_{n\ fois}{}^{(6)} = \underbrace{a6^0 + a.6^1 + a.6^2 + \cdots + a.6^{n-1}}_{n\ term}$ système de numération

$0 \leq a < 6$

1) $U_1 = a$, $U_2 = a + a.6^1$, $U_3 = a + a.6^1 + a.6^2$

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $U_n = a\sum_{0}^{n-1} 6^k = a\left(\frac{6^n - 1}{6-1}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{5U_n = a(6^n - 1)}$

b) $(E) : 6^n x - 5y = a$ ① Equations deciophante

On a : $5U_n = a(6^n - 1) \Leftrightarrow 6^n a - 5U_n = a$ ②

donc (a, U_n) sol particulière

① − ② $\Longrightarrow 6^n(x-a) - 5(y - U_n) = 0$

$6^n(x - a) = 5(y - U_n)$

$5 / 6^n(x-a)$ et on a $5 \wedge 6 = 1$

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1$

$\Leftrightarrow 5 \wedge 6^n = 1$

d'après Gauss

$5 / x - a \Rightarrow \boxed{x = a + 5K}$

et $\boxed{y = U_n + 6^n . k}$

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n\ fois}}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt

2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt

4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt

5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

(a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

(b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt

6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

(b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

(c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

(d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

et reciproquement

$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} \dots + 1)$
$= (a-1)\sum_0^n a^k$

$S = \{(a + 5k, U_n + 6^n.k) / k \in \mathbb{Z}\}$

3) on suppose

$U_n \equiv 0 [7] \Leftrightarrow 5U_n \equiv 0 [7]$ $(5 \wedge 7 = 1)$

$\Leftrightarrow a(6^n - 1) \equiv 0 [7]$

$\Leftrightarrow 6^n - 1 \equiv 0 [7]$ (car 7 est premier et $a < 7$) $7 \wedge a = 1$)

$\Leftrightarrow 6^n \equiv 1 [7]$

et on a $6 \equiv -1 [7]$

$\Leftrightarrow (-1)^n \equiv 1 [7]$

supp que n est impaire Alors $-1 \equiv 1 [7]$ absurd

donc n est paire

$U_n = k' U_m$?

4) si m / n Alors U_m / U_n

supp m/n Alors $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tq $n = km$

On a $5U_n = a(6^n - 1)$

$\Leftrightarrow 5U_n = a(6^{km} - 1)$

$= a((6^m)^k - 1)$

$$\begin{cases} 5U_n = a(6^m - 1)\left(\sum_0^{k-1} (6^m)^{k'}\right) \\ 5U_n = 5U_m(\sum \dots) \\ U_n = U_m \cdot k' / k' \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\ fois}{}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt
2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt
   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a$ $\quad (E)$.*
   Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt
4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt
5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*
   (a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt
   (b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt
6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt
   (b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt
   (c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt
   (d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

d'ou U_m / U_n

5) $a = 1$

il suffit de montrer sa contrapposé c.à.d

n non premier $\Rightarrow U_n$ non premier

supp que n non premier

donc $\exists\, d \in \mathbb{N}$ tq d / n

d'après ④ on aura

$U_d / U_n \quad (U_d \neq U_n)$

donc U_n est non premier.

d'où C.Q.F.D

(b) $U_5 = \ldots\ldots$ (divisible par 5)

U_5 non premier

$5U_5 = 6^5 - 1 \Rightarrow U_5 = \dfrac{6^5-1}{5} = 1555$

$\boxed{\begin{array}{l} U_n \text{ premier} \Rightarrow n \text{ premier} \\ n \text{ non premier} \Rightarrow U_n \text{ non premier} \end{array}}$

• conclusion

On a : 5 premier
Mais U_5 non premier

la réciproque de (a) n'est pas vraie

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n\,fois}}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt
2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt
   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
   Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt
4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt
5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*
   (a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt
   (b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt
6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad u_{n+1} = u_n + a\cdot 6^n$.* ....0.25 pt
   (b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt
   (c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt
   (d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

   Pour quelles valeurs de a, l'équation (F) admet des solutions.
   Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

6 a)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $U_{n+1} = a + a.6 + \dots \; a.6^n$

$= \underbrace{a + a.6 + \dots + a.6^{n-1}}_{} + a6^n$

$= U_n + a.6^n$

$U_{n+1} = \sum_{K=0}^{n} a.6^K = \sum_{0}^{n-1} a.6^k + a.6^n$

$= U_n + a.6^n$

$6^n U + (\sum) V = 1$

Question de livre

6 ©

(b) On a : $\sum_0^{n-1} 6^K = \frac{6^n - 1}{5}$

$\Leftrightarrow 5\left(\sum_0^{n-1} 6^K\right) = 6^n - 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{1}_{U} \times 6^n - \underbrace{5}_{V}\left(\sum_0^{n-1} 6^k\right) = 1$

$\exists U, V$ tq $U = 1$

$V = -5$

$6^n . U + (\sum) V = 1$

d'après Bezout

$6^n \wedge \sum 6^k = 1$

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\text{ fois}}{}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt

2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt

4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt

5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

(a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

(b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt

6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

(b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

(c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

(d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

c $U_n \wedge U_{n+1} = a$ (Question du live)

$a = b + c$

$a \wedge b = b \wedge c$

$a = bq + r$

$a \wedge b = b \wedge r$

c) on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_{n+1} = U_n + 6^n a$

Donc

$U_{n+1} \wedge U_n = U_n \wedge 6^n a$

$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a\, 6^k\right) \wedge 6^n a$

$= a\underbrace{\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} 6^k\right) \wedge 6^n\right)}_{1}$

$= a$

alors

$U_{n+1} \wedge U_n = a$

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n \text{ fois}}}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt
2. (a) *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
   Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt
3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt
4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt
5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

   (a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

   (b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt
6. (a) *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

   (b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

   (c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

   (d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

   Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
   Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

d $U_{n+1} \cdot x + U_n y = p$

$p \geqslant 7$

$ax + by = c$ admet des sol si $a \wedge b / c$

(F) admet des sol

si $\underbrace{U_{n+1} \wedge U_n}_{} / p$

c.à d a / p

on a p premier

donc $a = 1$ ou $a = p$

Resoudre (F) dans le cas $a = 1$.

$c-b$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête lexpérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$

,5 pt **c)** Montrer que : $p[X = 2] = \dfrac{5}{33}$

,5 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X = 3]$

,5 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x) = \dfrac{13}{11}$

,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice : 2 (**3.5 Points**)

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

Soit m **un nombre réel strictement positif** $(m > 0)$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) :\ z^2 + m(1+2i)z + m^2(1+7i) = 0$

0.25 **1)** Déterminer dans $\mathbb{C}$ les deux racines carrées du nombre complexe : $-7-24i$

0.5 **2)** Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) tel que : $Re(z_1) < 0$

0.5 **3)** Montrer que : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{-3\pi}{4}}$

4) Dans cette question on pose $z_1 = mre^{i\theta}$ tel que $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

0.5 Donner en fonction de r et θ la forme exponentielle du nombre complexe $1+7i$

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère les points A et B respectivement d'affixes $a = 1$ et $b = -1$.

Et soit l'application f du plan qui à tout point $M(z)$ différent de A associe le point

$M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$

1) Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$

0.5 **a)** Montrer que $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{-(z+\bar{z}-2)}{|z-1|^2}$, en déduire que les points A , M et M' sont alignés

0.25 **b)** Si $z' \neq -1$ et $Im(z') \neq 0$, montrer que les droites (BM') et (AM) sont perpendiculaires

0.25 **c)** Sans calculer z' , construire les points M et M' si $z = 3i$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système (S); $\begin{cases} z' = \dfrac{1}{6}(z+2)^2 \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases}$

0.75 Montrer que si z est une solution du système (S) alors z est une solution de l'équation $\left(z^2+2\right)(z-4) = 0$ puis recoudre le système (S)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a\in\mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a): z^2-(1+(1+i)a)z+ia^2+a=0$

1) Vérifier que a est une solution de (E_a)

2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1=a$

a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2=iz_1+1$

b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2

Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

1) Soit $z\in\mathbb{C}$

a) Montrer que $|z|=|1+iz|\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$

b) Déduire l'équivalence $\begin{cases}|z|=|1+iz|\\|z|=1\end{cases}\Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S)\begin{cases}z^n(1+iz)=1\\|z|=1\end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z\in\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$

b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n\equiv-2[12]$

montrer de même que $e^{5i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n\equiv2[12]$

d) Justifier l'équivalence $5n\equiv2[12]\Leftrightarrow n\equiv-2[12]$

e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

2) $Z_1=a$, $Z_2=iZ_1+1$

$A(Z_1)$, $B(Z_2)$

$Z'=iZ+1$

$|i|=1$

Rotation de C

$\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$

$\Omega(i)$

$\alpha\equiv\arg(i)[2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$R(A)=B\Longleftrightarrow Z_2-Z_\Omega=e^{i\alpha}(Z-Z_\Omega)$

déterminons le point invariant

$R(\Omega)=\Omega\Longleftrightarrow Z_\Omega=iZ_\Omega+1$

$\Longleftrightarrow Z_\Omega(1-i)=1$

$\Longleftrightarrow Z_\Omega=\frac{1}{1-i}=i$

On a $Z_2=iZ_1+1$ et $Z_\Omega=iZ_\Omega+1$

$\Longrightarrow Z_2-Z_\Omega=i(Z_1-Z_\Omega)$

$\Longrightarrow Z_2-i=i(Z-i)$

$Z_2-i=e^{i\pi/2}(Z-i)$

$|Z|=\sqrt{Z\bar{Z}}$

1) $|Z|^2=|1+iZ|^2\Longleftrightarrow Z\cdot\bar{Z}=(1+iZ)(1-i\bar{Z})$

$\Longleftrightarrow \cancel{Z\bar{Z}}=1-i\bar{Z}+iZ+\cancel{Z\bar{Z}}$

$\Longleftrightarrow i\bar{Z}-iZ=1$

$\Longleftrightarrow i(Z-\bar{Z})=-1$

$\Longleftrightarrow i(2i\,\mathrm{Im}\,Z)=-1$

$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(Z)=1/2$

$Z-\bar{Z}=2i\,\mathrm{Im}(Z)$

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a\in\mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a): z^2-(1+(1+i)a)z+ia^2+a=0$

1) Vérifier que a est une solution de (E_a)

2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1=a$

   a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2=iz_1+1$

   b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2

   Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

1) Soit $z\in\mathbb{C}$

   a) Montrer que $|z|=|1+iz|\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$

   b) Déduire l'équivalence $\begin{cases}|z|=|1+iz|\\ |z|=1\end{cases}\Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S)\begin{cases}z^n(1+iz)=1\\ |z|=1\end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

   a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z\in\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$

   b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

   c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n\equiv-2[12]$

   montrer de même que $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n\equiv2[12]$

   d) Justifier l'équivalence $5n\equiv2[12]\Leftrightarrow n\equiv-2[12]$

   e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

b) $\begin{cases}|z|=|1+iz|\\ |z|=1\end{cases}$

$|z|=|z'|$ ~~$\Rightarrow$~~ $z=z'$

soit $\alpha\equiv\arg z\,[2\pi]$

donc $z=1e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$=\cos\alpha+\frac{1}{2}i$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ donc $\cos\alpha=\frac{\sqrt3}{2}$ ou $\cos\alpha=-\frac{\sqrt3}{2}$

$\alpha\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou

$\alpha\equiv\pi-\pi/6\,[2\pi]$

$z=e^{i\pi/6}$ ou $z=e^{i5\pi/6}$

(a) soit z sol de (S)

donc $\begin{cases}z^n(1+iz)=1\\ |z|=1\end{cases}$

$z=a+i$

$\Rightarrow\begin{cases}|z^n||1+iz|=1\\ |z|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|1+iz|=1\\ |z|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|1+iz|=|z|\\ |z|=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow z\in\{e^{i\pi/6},e^{i\frac{5\pi}{6}}\}$

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a): z^2-(1+(1+i)a)z+ia^2+a=0$

1) Vérifier que a est une solution de (E_a)
2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1 = a$
   a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2 = iz_1+1$
   b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
   Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

1) Soit $z \in \mathbb{C}$
   a) Montrer que $|z| = |1+iz| \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}$
   b) Déduire l'équivalence $\begin{cases} |z| = |1+iz| \\ |z| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S)\begin{cases} z^n(1+iz) = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

   a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}} \right\}$
   b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
   c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n \equiv -2[12]$
   montrer de même que $e^{5i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n \equiv 2[12]$
   d) Justifier l'équivalence $5n \equiv 2[12] \Leftrightarrow n \equiv -2[12]$
   e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

b) $1+ie^{i\pi/6} = 1+i(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$

$= 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$

$1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(2\cos\theta/2)$

c) supp $z = e^{i\pi/6}$ sol de (S)

$\Rightarrow \begin{cases} e^{i\pi/6\, n}(1+ie^{i\pi/6}) = 1 \\ |e^{i\pi/6}| = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow e^{i\pi/6\, n}(e^{i\pi/3}) = 1$

$\Rightarrow e^{i(\pi/6\, n + \pi/3)} = 1 = e^{i2k\pi}$

$\Rightarrow \pi/6\, n + \pi/3 = 2k\pi$

$\Leftrightarrow n \equiv -2\,[12]$

supp que $n \equiv -2\,[12]$
et on montre que $e^{i\pi/6}$ solution du système (vérifier

de la m̂ façon
$z = e^{i5\pi/6}$

$e^{i\theta} = e^{i\theta'}$

$\theta = \theta' + 2k\pi$

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes

PARTIE I

Soit $a\in\mathbb{C}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a): z^2-(1+(1+i)a)z+ia^2+a=0$

1) Vérifier que a est une solution de (E_a)
2) On note par z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_a) tels que $z_1=a$
   a) Déterminer z_2 et vérifier que $z_2=iz_1+1$
   b) Dans le plan complexe on note par A et B les points d'affixe z_1 respectivement z_2
   Montrer B est l'image de A par une rotation r dont on déterminera le centre et une mesure de son angle

PARTIE II

1) Soit $z\in\mathbb{C}$
   a) Montrer que $|z|=|1+iz|\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2}$
   b) Déduire l'équivalence $\begin{cases}|z|=|1+iz|\\|z|=1\end{cases}\Leftrightarrow z=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ou $z=e^{i\frac{5\pi}{6}}$
2) On considère dans $\mathbb{C}$ le système suivant $(S)\begin{cases}z^n(1+iz)=1\\|z|=1\end{cases}$ où n est un entier naturel non nul

   a) Montrer que si z est une solution de (S) alors $z\in\left\{e^{i\frac{\pi}{6}},e^{i\frac{5\pi}{6}}\right\}$
   b) Vérifier que $1+ie^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1+ie^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$
   c) Déduire que $e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $n\equiv-2[12]$
   montrer de même que $e^{5i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de (S) si et seulement si $5n\equiv2[12]$
   d) Justifier l'équivalence $5n\equiv2[12]\Leftrightarrow n\equiv-2[12]$
   e) Déduire suivant l'entier naturel n l'ensemble des solutions de (S)

d) $5n\equiv2[12]\Leftrightarrow 25n\equiv10[12]$ $(5\wedge12=1)$

~~on~~a $25\equiv1[12]$

et $10\equiv-2[12]$

donc : $n\equiv-2[12]$

$c\wedge n=1$

$a\equiv b[n]$

$\Longleftrightarrow ac\equiv bc[n]$

e) 2017 (p: premier)

• si $n\equiv-2[12]\Longleftrightarrow$ les solution du système $z=e^{i\pi/6}$

ou $z=e^{i5\pi/6}$ $S=\{e^{i\pi/6},e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_1=$ et z_2

• si $n\not\equiv-2[12]$ ALors (S) n'a pas de solution

○ **Exercice N°01 : (3,5pts)**

I- On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante :

$$(E):\ iz^2-(1-i)(1+im)z+m^2-1=0,\ \text{Où } m\in\mathbb{C}-\{-1;1\}.$$

0,25 **1)- a)-** Vérifier que le discriminant de (E) est : $\Delta=-2i(m+i)^2$.

0,5 **b)-** En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2)- On suppose dans cette question que : $m=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0;\pi\right[$.

0,5 ✓ Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique.

II- Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On considère les points A ; B ; C ; D et E d'affixes respectifs :

$$z_A=im\ ;\ z_B=i(1+m)\ ;\ z_C=1-m\ ;\ z_D=(z_B)^2 \text{ et } z_E=\frac{m+(z_B)^2}{1-i}.$$

0,5 **1)-** Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que O ; B et C soient alignés.

2)- Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ tels que : $R(A)=C$.

0,5 ✓ Montrer que l'affixe du centre Ω de la rotation R est : $\omega=\frac{1+i}{2}$.

3)- On suppose dans cette question que : $|m|=1$ et $m^2+(2+i)m+1\neq 0$.

0,5 **a)-** Montrer que ADE est un triangle rectangle et isocèle en E.

0,75 **b)-** Montrer que les points O ; A ; D et E sont cocycliques et déterminer l'affixe du centre du cercle (Γ) circonscrit au quadrilatère formé par ces quatre points.

1) a) $\Delta=(-2i)(m+i)^2$
$=\left[(1-i)(m+i)\right]^2$

$(1+i)^2=2i$
$(1-i)^2=-2i$

Exercice N°03 : (03pts)

	➪ Pour tout entier naturel premier et impair p, On pose : $$N_p = 11p + 7^p - 8.$$
0,5	1)- Montrer que : $N_p \equiv -1\ [p]$.
	2)- On suppose qu'il existe un entier naturel m tel que : $N_p = m^2$.
0,25	a)- Montrer que : $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.
0,5	b)- En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $m \wedge p = 1$. Puis en déduire que : $m^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
0,5	c)- Montrer que : $p \equiv 1\ [4]$.
0,5	d)- Prouver que : $m^2 \equiv 2\ [4]$.
0,5	3)- Soit $a \in \mathbb{N}$, quels sont les restes possibles de la division de a^2 par 4 ?
0,25	4)- En utilisant ce qui précède, montrer que N_p n'est jamais un carré parfait.

1) Mq $N_p \equiv -1\ [p]$

On a $11p \equiv 0\ [p]$

et on a p premier donc

Thm de Fermat

$7^p \equiv 7\ [p]$

d'où : $N_p \equiv 0 + 7 - 8\ [p]$

$N_p \equiv -1\ [p]$

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$a^p \equiv a\ [p]$

$a \equiv b\ [n]$ et $k \in \mathbb{N}$

Alors :

$a^k \equiv b^k\ [n]$

2) $N_p = m^2$

a) $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$

On a $N_p \equiv -1\ [p]$

C.à.d $m^2 \equiv (-1)\ [p]$

et comme p est impaire

alors $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}^*$

$\Longrightarrow (m^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$

$\Longleftrightarrow m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$

$m \wedge p = 1 \Longleftrightarrow \exists u, v$ tq $mu + pv = 1$

On a :

Exercice N°03 : (03pts)

⇨ *Pour tout entier naturel* *premier* *et* *impair* p, *On pose :*

$$N_p = 11p + 7^p - 8.$$

0,5	1)- Montrer que : $N_p \equiv -1\ [p]$.
	2)- On suppose qu'il existe un entier naturel m tel que : $N_p = m^2$.
0,25	a)- Montrer que : $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.
0,5	b)- En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $m \wedge p = 1$. Puis en déduire que : $m^{p-1} \equiv 1\ [p]$.
0,5	c)- Montrer que : $p \equiv 1\ [4]$.
0,5	d)- Prouver que : $m^2 \equiv 2\ [4]$.
0,5	3)- Soit $a \in \mathbb{N}$, quels sont les restes possibles de la division de a^2 par 4 ?
0,25	4)- En utilisant ce qui précède, montrer que N_p n'est jamais un carré parfait.

b) $m \wedge p = 1$ $\quad |a^2 - 3b|$

On a p premier et $m \wedge p = 1$
d'après le P.T.F
$m^{p-1} \equiv 1\ [p]$

$p \equiv 0\ [4]$ $\quad 0 \leqslant r \leqslant 3$
$p \equiv 1\ [4]$
$p \equiv 2\ [4]$
$p \equiv 3\ [4]$

c) $p \equiv 1\ [4]$

. si $p \equiv 0\ [4]$ alors p paire absurde
. Si $p \equiv 2\ [4]$,, p paire absurde
- Si $p \equiv 3\ [4] \Rightarrow p = 3 + 4k$ $k \in \mathbb{N}$

$a \equiv r\ [n]$
$0 \leqslant r \leqslant n-1$

donc $p \equiv 1\ [4]$

d'après ⓐ On a $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$

$m^{p-1} \equiv (-1)^{2k+1}\ [p]$

$m^{p-1} \equiv -1\ [p]$ absurde avec ⓑ

○ Exercice N°03 : (03pts)

⇨ Pour tout entier naturel premier et impair p, On pose :

$$N_p = 11p + 7^p - 8.$$

0,5 1)- Montrer que : $N_p \equiv -1\ [p]$.

2)- On suppose qu'il existe un entier naturel m tel que : $N_p = m^2$.

0,25 a)- Montrer que : $m^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

0,5 b)- En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $m \wedge p = 1$. Puis en déduire que : $m^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

0,5 c)- Montrer que : $p \equiv 1\ [4]$.

0,5 d)- Prouver que : $m^2 \equiv 2\ [4]$.

0,5 3)- Soit $a \in \mathbb{N}$, quels sont les restes possibles de la division de a^2 par 4 ?

0,25 4)- En utilisant ce qui précède, montrer que N_p n'est jamais un carré parfait.

d) $m^2 \equiv 2[4]$

$11 \equiv 3\ [4]$ et $p \equiv 1[4]$

et $7 \equiv -1[4]$

$7^p \equiv (-1)^p\ [4]$

$7^p \equiv -1\ [4]$ / p impair

et $p \equiv 1[4]$ et $8 \equiv 0[4]$

d'ou $11p + 7^p - 8 \equiv 3(1) + (-1) - 0\ [4]$

$m^2 \equiv 2\ [4]$

$p \equiv 1\ [4]$

$11p \equiv 11\ [4]$

$\equiv 3\ [4]$

3) $a \in \mathbb{N}$ si $a \equiv 0\ [4]$ alors $a^2 \equiv 0[4]$

- si $a \equiv 1[4]$ alors $a^2 \equiv 1[4]$
- si $a \equiv 2[4]$ " $a^2 \equiv 0\ [4]$
- si $a \equiv 3[4]$ " $a^2 \equiv 1\ [4]$

les reste de la division de a^2 par 4 sont 0 et 1

4) On suppose que : N_p est un carré parfait
donc $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tq $N_p = m^2$
d'après d on a $m^2 \equiv 2\ [4]$ absurde
car $m^2 \equiv 0[4]$ ou $m^2 \equiv 1[4]$

Yasmine Rhazouli à Tout le monde 20:19

on a 11congru à 3mod4 et 8 congru à 0mod4 et 7 congru à -1 mod4 donc 7^p est cngru à -1 mod4 (car p est impair) donc m^2 congru à 2 mod4

et p est congru à 1mod 4 donc 11p

Yassmine Rhaz

On a : $m^2 \equiv -1 \ (p)$ donc $p \mid m^2+1$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} \ /$ $m^2+1 = pk$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} \ /$ $p(k) - m(m) = 1$

Donc $\exists (k ; -m) \in \mathbb{Z}) \ /$ $p \times k + m \times -m = 1$

$\Leftrightarrow$ $m \wedge p = 1$