Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

Soit $(E) : z^2-(2-\sqrt{3}+i)mz+2(i-\sqrt{3})m^2=0 \quad ; \quad m\in\mathbb{C}^* \quad ; \quad z\in\mathbb{C}$

1. (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=(2+\sqrt{3}-i)^2m^2$

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

   Soient $z_1; z_2$ les solutions de (E)

(c) Écrire le nombre complexe $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$ sous la forme exponentielle.

2. Soit F l'application définie ainsi :

$$\begin{aligned} F : (\mathcal{P}) &\mapsto (\mathcal{P}) \\ M(z) &\mapsto M'(z') \\ z' &= e^{\left(\frac{5i\pi}{6}\right)} z \end{aligned}$$

   (a) Déterminer la nature et les caractéristiques de l'application F.

   (b) Déterminer l'image du cercle.

   (c) de centre $\Omega(1+i)$ et de rayon 2 .

3. On considère la suite de points $(M_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie ainsi :

$$\begin{cases} M_{n+1} = F(M_n); & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{aff}(M_0) = i = z_0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$

   (b) Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad ; \quad M_n = M_p \Leftrightarrow n \equiv p[12]$

   (c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (F) suivante : $(F) : 12x - 5y = 3$

   (d) En déduire les valeurs de n pour lesquels on ait $M_n \in$ (l'axe réel)

4. Soit le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 0[12] \\ x \equiv 3[5] \end{cases}$ et soit (k_0, l_0) une solution de (F)

   (a) Montrer que le nombre $x_0 = 12k_0 = 5l_0 + 3$ est une solution de (S)

   (b) Montrer que : $x = \text{solution}(S) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv x_0[60]$

   (c) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ le système (S).

5. Déterminer l'ensemble $R_n = \{n \in \mathbb{N}; M_n = M_0 \quad ; \quad n \equiv 3[5]\}$

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$(E) : a^2 + b^3 = 7$$

I- Soit $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (E).

1. a. Montrer que : $b\equiv 1[2]$.

b. On pose : $b = 2z+1$.

Montrer que : $a^2+1=(2-b)\times q$ tel que $q=4z^2+8z+7$.

c. Montrer que : $q\equiv 3[4]$.

2. Soit $q=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de q en produit de facteurs premiers.

a. Montrer que : $(\forall i\in\{1,2,\cdots,r\})$; $p_i\equiv 1[4]$ ou $p_i\equiv 3[4]$.

b. Monter qu'il existe $j\in\{1,2,\cdots,r\}$ tel que : $p_j\equiv 3[4]$.

3. a. En déduire qu'il existe un nombre premier p qui vérifie : $\begin{cases} a^2+1\equiv 0[p] \\ p\equiv 3[4] \\ p\geq 3 \end{cases}$

b. En utilisant le théorème de **FERMAT** montrer que : $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1[p]$.

c. En déduire que : $p\equiv 1[4]$

II- Déduire des questions précédentes que l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 1 (5 pts) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\ fois}{}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt

2. **(a)** *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a(6^n - 1)$* ....0.25 pt

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt

4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt

5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

(a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

(b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt

6. **(a)** *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

(b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

(c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

(d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

Pour tout entier naturel n, non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1) Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leur représentation graphique respective $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ dans un repère orthonormé du plan $(O:\vec{i},\vec{j})$. Préciser la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

2) Prouver que, pour tout n, f_n est intégrable sur $[0;1]$.

On définit, alors, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

3) **a)** À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de f_n sur $]0;1]$.

b) En déduire une primitive de f_n sur $[0;1]$.

c) Montrer que $u_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

d) Soit D le sous-ensemble du plan constitué des points M dont les coordonnées $(x;y)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ vérifient $0 \leq x \leq 1$ et $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$. Calculer, l'aire de D.

4) Soit g la fonction, définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) Montrer que g est intégrable sur $[0;1]$.

b) Soit x un réel quelconque. Calculer pour tout n de N la somme :
$S_n(x) = x - x^3 + x^5 - x7 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1}$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{x}{1+x^2} = x - x^3 + \cdots + (-1)^n x^{2n+1} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{1+x^2}$.

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 g(x)dx = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{f_{2n+3}(x)}{1+x^2}dx$.

e) On pose pour tout n de N, $S_n = u_1 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_{2n+1}$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\int_0^1 g(x)dx - S_n\right| \leq -u_{2n+3}$.

f) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 g(x)dx$.

g) Déterminer un entier n_0 tel que $\left|\int_0^1 g(x)dx - S_{n_0}\right| \leq 10^{-2}$. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de $\int_0^1 g(x)dx$.

5) Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $G(x) = \int_0^x g(t)dt$.

a) Étudier la dérivabilité de G et son sens de variation.

b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 1 \quad , \quad \frac{1}{2t^2} \leq \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{1}{t^2}$.

c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \quad , \quad \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt \leq \int_1^x g(t)dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

d) Calculer pour tout $x > 1 \quad , \quad \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

e) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x}$.

6) Donner l'allure de la courbe représentative de G. Préciser la tangente au point d'abscisse 1 et la nature de la branche infinie. La courbe a-t-elle une tangente au point d'abscisse 0 ?

ثانوية الأمير مولاي عبد الله
التاهيلية-الصخيرات

Probleme Analyse (Les integrales 2)
Mathématiques

2Bac SMA-F

Probleme :

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}dt$$

1- Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2- Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3- a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1)$

c) Déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$ puis calculer $F(2)$.

d) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad F(n) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$

e) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad F(n+1) = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}$.

f) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad F(-n) = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$, puis calculer $F(-1)$ et $F(-2)$.

4- a) Montrer que $(\forall x \leq 0)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^x \leq F(x)$

b) Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat.

5- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

a) Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $(\forall x \geq 1)\quad \varphi(x) \leq \varphi(1) + 2e^{-\frac{1}{2}}$

c) Montrer que $(\forall t \in [0;1])\quad \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t^2)$.

d) Déduire que $(\forall x \geq 0)\ F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}dt$

e) Soit $x \geq 0$. Ecrire $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}dt$ en fonction de φ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

6- On pose :

$$g(x) = \int_1^0 \ln(1+t^2)\, e^{-x\ln(1+t^2)}dt$$

a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$

b) Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})\quad |e^a - 1 - a| \leq \frac{a^2}{2}e^{|a|}$

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| \leq 1$. Montrer que :

$$|F(x_0+h) - F(x_0) + hg(x_0)| \leq h^2 \int_0^1 (\ln(1+t^2))^2 e^{x_0\ln(1+t^2)}dt$$

d) Déduire que F est dérivable en x_0 puis déterminer $F'(x_0)$.

e) En utilisant la fonction dérivée, montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(0)$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête lexpérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$

,5 pt **c)** Montrer que : $p[X = 2] = \dfrac{5}{33}$

,5 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X = 3]$

,5 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x) = \dfrac{13}{11}$

,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

0.5 pt **4 -** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

0.75 pt **1 -** Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2 - On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3 - Au cours d'un jeu , on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

0.5 pt **a)** déterminer la loi de probabilité de la variable X.

0.25 pt **b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.