Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$
2. Soit x une solution de l'équation (E)

   (On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)

   (a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux

   (b) Montrer que $x^2 \equiv 1\ [3]$ et $x^4 \equiv 1\ [5]$

   (c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1\ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1\ [25]$

   (utiliser la question 1)

   (d) En déduire que $x \equiv 2024\ [2025]$

(E) $x^{1079} \equiv 2024 [2025]$

$x^p \equiv y^p \not\Rightarrow x \equiv y\ [n]$

1) $a \equiv 1 [p] \Rightarrow a^p \equiv 1 [p^2]$

supp q'c $a \equiv 1 [p]$ c-à-d Mq

$a^p \equiv 1 [p^2]$

On a $a^p - 1 = (a-1)\left(\overbrace{a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + 1}\right)$

on a $a \equiv 1 [p] \Rightarrow (a-1) \equiv 0 [p]$

on a $a \equiv 1 [p]$

$\forall k \in \{0, \dots, p-1\}$

$a^k \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{p-1} a^k \equiv \sum_{0}^{p-1} 1 [p]$

$\sum_{0}^{p-1} a^k \equiv p [p]$

donc $p \,/ \sum_{0}^{p-1} a^k$

et $p \,/ (a-1)$

donc $p^2 \,/ (a-1) \sum_{0}^{p-1} a^i$

$p^2 \,/ a^p - 1 \Rightarrow a^p \equiv 1 [p^2]$

a/b

c/d

ac/bd

$b = ak$

$d = ck'$

$bd = (ac)kk'$

Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$
2. Soit x une solution de l'équation (E)
   (On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)
   (a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux
   (b) Montrer que $x^2 \equiv 1\ [3]$ et $x^4 \equiv 1\ [5]$
   (c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1\ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1\ [25]$
   (utiliser la question 1)
   (d) En déduire que $x \equiv 2024\ [2025]$

on a $a \equiv 1 [p]$ $\quad a^p - 1 = (a-1)\left(\sum_0^{p-1} a^k\right)$

$\Rightarrow a^k \equiv 1 [p]$

$\sum_0^{p-1} a^k \equiv \sum_0^{p-1} 1 [p]$ $\quad (a+b)^n$

$\sum_0^{p-1} a^k \equiv p [p]$ $\quad a-1 \equiv 0 [p]$

$\equiv 0 [p]$ $\quad (a-1)^p \equiv 0 [p]$

donc $p / \sum_0^{p-1} a^k$ $\quad \sum C_p^k a^k (-1)^{n-k} \equiv 0$

et on a $p / a-1$ $\quad \sum$

donc $p^2 / (a-1)\left(\sum_0^{p-1} a^k\right)$

$p^2 / a^p - 1$

Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$
2. Soit x une solution de l'équation (E)
   (On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)
   (a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux
   (b) Montrer que $x^2 \equiv 1 \ [3]$ et $x^4 \equiv 1 \ [5]$
   (c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1 \ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1 \ [25]$
   (utiliser la question 1)
   (d) En déduire que $x \equiv 2024 \ [2025]$

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots C_n^n a^n$$

pour $n = 4$ $\quad (a+b)^4 = 1 a^0 b^4 + 4 a b^3 + 6 a^2 b^2 + 4 a^3 b + b^4$

$(a + (-b))$

1

$1 \quad 1$

$n=2 \quad 1 \rightarrow 2 \quad 1$

$n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$

$n=4 \quad \boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}$

$\vdots$

$n \quad \boxed{C_n^0 \; C_n^1 \; \dots \; C_n^n}$

Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$
2. Soit x une solution de l'équation (E)

   (On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)

   (a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux

   (b) Montrer que $x^2 \equiv 1\ [3]$ et $x^4 \equiv 1\ [5]$

   (c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1\ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1\ [25]$

   (utiliser la question 1)

   (d) En déduire que $x \equiv 2024\ [2025]$

2/ Soit $x \in S$ (ensem de sol)

$x^n \equiv \pm 1\ [m]$
utilisez bezout

(a) $x \wedge 2025 = 1$

On a $x^{1079} \equiv 2024\ [2025]$

$\equiv -1\ [2025]$ $(2024 \equiv -1\ [2025])$

$\Longrightarrow (\exists K \in \mathbb{Z})$ tq $x^{1079} = -1 + 2025K$

$\Longleftrightarrow 2025K - x\left(x^{1078}\right) = 1$

donc $\exists\, u = K$ et $v = -x^{1078} \in \mathbb{Z}$

tq $2025u + xv = 1$

d'après Th de Bézout

$2025 \wedge x = 1$

Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$
2. Soit x une solution de l'équation (E)

   (On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)

   (a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux

   (b) Montrer que $x^2 \equiv 1\ [3]$ et $x^4 \equiv 1\ [5]$

   (c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1\ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1\ [25]$

   (utiliser la question 1)

   (d) En déduire que $x \equiv 2024\ [2025]$

2/

(b) on a 3 et 5 sont premiers

et $x \wedge 2025 = 1$

c à d $x \wedge 3^4 \times 5^2 = 1$

$\iff x \wedge 3 = 1$ et $x \wedge 5 = 1$

d'après P.T.F

$x^{3-1} \equiv 1[3]$ et $x^{5-1} \equiv 1[5]$

c à d $x^2 \equiv 1[3]$ et $x^4 \equiv 1[5]$

(c) on a $x^2 \equiv 1[3]$ et $x^4 \equiv 1[5]$

$\Rightarrow (x^2)^3 \equiv 1[9]$ et $x^{20} \equiv 1[25]$

$\Rightarrow x^6 \equiv 1[9]$ et $x^{1080} \equiv 1[25]$

$\Rightarrow x^{54} \equiv 1[81]$ et $x^{1080} \equiv 1[25]$

$\Rightarrow x^{1080} \equiv 1[81]$ et $x^{1080} \equiv 1[25]$

(d) corollaire de Gauss

$a \mid b$ et $a \wedge c = 1$

$c \mid b$

$\Rightarrow ac \mid b$

on a $25 \mid (x^{1080} - 1)$

et $81 \mid (x^{1080} - 1)$

et $25 \wedge 81 = 1$

donc : $25 \times 81 \mid (x^{1080} - 1)$

c à d $\boxed{2025 \mid (x^{1080} - 1)}$

Exercice se rapporte à l'arithmétique

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{1079} \equiv 2024[2025]$

1. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall p \in \mathbb{N}^*)$, $\left(a \equiv 1[p] \Rightarrow a^p \equiv 1\left[p^2\right]\right)$

2. Soit x une solution de l'équation (E)

(On donne $2025 = 3^4 \times 5^2$ et $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$)

(a) Montrer que x et 2025 sont premiers entre eux

(b) Montrer que $x^2 \equiv 1\ [3]$ et $x^4 \equiv 1\ [5]$

(c) Montrer que $x^{1080} \equiv 1\ [81]$ et $x^{1080} \equiv 1\ [25]$

(utiliser la question 1)

(d) En déduire que $x \equiv 2024\ [2025]$

3) En deduire les solutions de (E)

On a : $x^{1079} \equiv 2024 [2025]$ ①

et $x^{1080} \equiv 1 [2025]$

① $\Longleftrightarrow x(x^{1079}) \equiv 2024x [2025]$ $(x \wedge 2025 = 1)$

$\Longleftrightarrow x^{1080} \equiv 2024x [2025]$

$\Longleftrightarrow 1 \equiv 2024x [2025]$

et $2024 \equiv -1 [2025]$

$\Longleftrightarrow x \equiv -1 [2025]$

$\{ x \equiv 2024 [2025]$

reciproquement

soit $x \equiv 2024 [2025]$ $\Rightarrow x^{1079} \equiv -1 [2025]$

$\Longrightarrow x \equiv -1 [2025]$ $\Rightarrow x^{1079} \equiv 2024 [2025]$

D'où $S = \{x = -1 + 2025k / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 3: (3 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.
Soit m un nombre complexe non nul d'argument $\theta \in \mathbb{R}$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, $(E_m) : \frac{1}{m}z^2 + (1-3i)z - 4m = 0$.

Partie I :

5 **1-** a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe : $8 - 6i$.

b) Déterminer en fonction de m, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_m) où $Re\left(\frac{z_2}{m}\right) < 0$.

5 c) Montrer que $z_1 = \sqrt{2}|m|e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}|m|e^{i(\theta+\frac{3\pi}{4})}$.

Partie II : On considère les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectives z_1, z_2, m et $1+3i$.

1- a) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

b) Montrer que si $\arg(z_1+z_2) \equiv 0\ [\pi]$, alors les points O, M et D sont alignés.

c) En déduire que l'ensemble des points M tel que $\arg(z_1+z_2) \equiv 0\ [\pi]$ est la droite d'équation : $y = 3x$, privée de l'origine.

2- Le point $M_1'(z_1')$ est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Et $M_2'(z_2')$ est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Vérifier que $\frac{z_1'-z_1}{z_2'-z_1} \times \frac{z_2'-z_2}{z_1'-z_2} = -4$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

4 - Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

1 - Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2 - On répète 5 fois le jeu précédent.

  a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

  b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3 - Au cours d'un jeu , on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

  a) déterminer la loi de probabilité de la variable X.

  b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : **(4 pts)**

Soit α une solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0$$

On considère l'ensemble :

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ est un groupe commutatif. (0,5 pt)

2)

a) Montrer que $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. (0,5 pt)

b) L'anneau $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \times)$ est-il intègre ? (0,5 pt)

3) Vérifier que :

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$$ $(0, 5pt)$

4) On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{Z}[\alpha] \to \mathbb{Z}, \quad f(a + b\alpha) = a^2 + b^2 - ab$$

a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{Z}[\alpha]$, on a $f(X) = |X|^2$. (0,5 pt)

b) Montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{Z}[\alpha], \times)$ vers $(\mathbb{Z}, \times)$. (0,5 pt)

c) Soit G l'ensemble des éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}[\alpha], \times)$

i) Montrer que : $f(G) = \{1\}$ (0,5 pt)

ii) En déduire, en extension, l'ensemble G (0,5 pt)

Exercice 2: (3 pts)

Partie I : Dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, on considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

0,25 **1- a)** Montrer que (A, I) est une famille libre dans l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. On considère l'ensemble : $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2x+y & 2x \\ 2x & 3x+y \end{pmatrix} \middle| (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,25 **a)** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

0,5 **b)** Montrer que (A, I) est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$.

Partie II :

1- On définit sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne T définie par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2), \quad x\,T\,y = x + y - 2025.$$

0,5 **a)** Montrer que T est commutative et associative dans $\mathbb{R}$.

0,5 **b)** Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe commutatif.

2- On définit aussi une loi de composition interne $\perp$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2), \quad x \perp y = x + y - \frac{1}{2025}xy,$$

et on considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2025(1 - x)$.

0,25 **a)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},\times)$ vers $(\mathbb{R},\perp)$.

0,25 **b)** Déterminer $f(\mathbb{R}^*)$.

0,5 **c)** Déduire que $(\mathbb{R},T,\perp)$ est un corps commutatif.

EXERCICE3 :(3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p **le plus petit diviseur premier** de n

0.25 1-a) Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n \ [p]$

0.25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25 c) En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \ [p]$

0.5 2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3- On suppose que n est impair.

0.5 a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

0.5 c) On pose : $v' = -(v + nq)$. Montrer que : $v' \geq 0$

0.5 d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Examen du Baccalauréat **Session Normal 2008**

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} \middle/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I, J) est une base dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

2 - On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ a + ib & \longmapsto & M(a;b) \end{array}$ où : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J \times X^3 = I$ (où $X^3 = X \times X \times X$)

$I^2 = I$, $IJ = J$

J^2 (en fonction de I et J)

- $(E, +, \cdot) \Longrightarrow (E, +)$ G.C
- $\dim E = \text{card}\{I, J\} = 2$ avec (I, J) base de E

(I, J) base $\begin{cases} \longrightarrow \text{génératrice} \\ \longrightarrow \text{libre} \end{cases}$

- Génératrice $M(a,b) = aI + bJ$
- libre $aI + bJ = O_2$ c.à.d $M(a,b) = O_2$ $\Longrightarrow a = b = 0$

$\forall M(a,b) \in E,\ M(a,b) = aI + bJ$ (a,b) uniques

- Partie stable

$M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ)(cI + dJ)$

$= (\quad) I + (\quad) J$

Groupe
- Sous groupe d'un groupe usuelle
- une Loi $*$
  - associ
  - element neutr
  - " symetrisabl
- isomorphisme avec un groupe usuelle
- $\underbrace{(E, *}, \circ)$ est espace vectoriel

- $\underset{\sim}{\text{bijective}}$ $f : E \longrightarrow F$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow F$
$x + iy \longrightarrow M(x, y)$

Soit $(y \in F)$ cherchons un antécedent x de E tq $f(x) = y$

Soit $M \in F$ donc $\exists (a, b)$ tq $M = M(a, b)$

$f(x + iy) = M(a + ib) \Longrightarrow M(x, y) = M(a, b)$

$(\quad) = (\quad) \Rightarrow \begin{matrix} x = a \\ y = b \end{matrix}$

- E est un sous groupe de $(\underbrace{M_2(\mathbb{R}), \times})$

Faux

car $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ n'est pas un groupe

- E est un sous groupe de $(G, *)$ $\downarrow$ groupe

$(\mathbb{C}^*, \times)$

- $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}^*, \times)$
- $(M_2(\mathbb{R}), +), (M_3(\mathbb{R}), +)$
- $(\mathcal{F}, +), (\mathcal{B}, \circ)$

Examen du Baccalauréat **Session Normal 2008**

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & \sqrt{3}b\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J\times X^3=I$ (où $X^3=X\times X\times X$)

• $A^2-3A=I_2$

$\iff A(A-3I_2)=I_2$ et $(A-3I_2)A=I_2$

$A\cdot A^{-1}=I$ et $A^{-1}\cdot A=I$

donc A est inversible et $A^{-1}=A-3I$

• $(E,+,\times)$ anneau unitaire com

• $(E,+)$ (G.C) (car $(E,+,\cdot)$ evn)

• $\times$ est associative et distributive / à $+$

car E partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ anneau

• $I\in E$ car $(I=1I+0J)$

• Com

$M(c,d)\times M(a,b)=(\ \ )I+(\ \ )J$

$=M(a,b)\cdot M(c,d)$

$(E,+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif

On a : $(M(a,b))^n = f((a+ib)^n)$

Examen du Baccalauréat **Session Normal 2008**

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} \Big/ a,b \in \mathbb{R} \right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b) \end{array}$ où : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J \times X^3 = I$ (où $X^3 = X \times X \times X$)

3) $(E,+)$ groupe Com.
$(E^*,\times)$ group com (isomorphe
et $\times$ est distri / à $+$
$\times$ est commutatif
$\Rightarrow (E,+,\times)$ corps Com

4) $(M(a,b))^{-1} = (f(a+ib))^{-1}$
$= f((a+ib)^{-1})$
$= f\left(\frac{1}{a+ib}\right)$
$= f\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$(M(a,b))^{-1} = M\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Examen du Baccalauréat **Session Normal 2008**

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\,/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J\times X^3=I$ (ou $X^3=X\times X\times X$)

$$\left(M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2025} = f\left(\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2025}\right)$$
$$= f\left(e^{i\frac{2025\pi}{3}}\right)$$
$$= f(e^{i\pi}) = f(-1)$$

$$\frac{2025\pi}{3} = 675\pi \equiv \pi\ [2\pi]$$

$$= M(-1,0)$$

4)

$I = M(1,0) = f(1)$

$J = M(0,1) = f(i)$

$$J\times X^3 = I$$
$$\iff f(i)\times f(x+iy)^3 = f(1)$$
$$\iff f\left(i(x+iy)^3\right) = f(1)$$
$$\implies i(x+iy)^3 = 1$$

$$(x+iy)^3 = \frac{1}{i} = -i = e^{-i\pi/2}$$

$$Z^n = re^{i\theta} \implies Z_K = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

$$Z^3 = e^{-i\pi/2} \iff (re^{i\theta})^3 = e^{-i\pi/2}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = -\pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

$k \in \{0, 1, 2\}$

$$\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{-\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z_k = e^{i\left(-\pi/6 + \frac{2k\pi}{3}\right)}$$

Examen du Baccalauréat — Session Normal 2008

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a \end{pmatrix} \diagup a, b \in \mathbb{R} \right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I, J) est une base dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b) \end{array}$ où : $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J \times X^3 = I$ (où $X^3 = X \times X \times X$)

$\cdot\ k = 0 \longrightarrow Z_0 = e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

$M_0 = M\left(\sqrt{3}/2, -1/2\right)$

$\cdot\ k = 1 \longrightarrow Z_1 =$

I

$AB - A = 0$

$A(B - I) = 0_2$ et $(B - I)A = 0$

$\ne 0 \quad \ne 0$

un corp $\Longrightarrow$ anneau intègre

anneau non intègre $\Longrightarrow$ n'est pas un corp

1) A) On dispose de deux urnes U_1 et U_2. Dans U_1, il y 2 boules rouges et 8 boules blanches et dans U_2, il y une boule rouge et deux blanches

1) L'épreuve consiste à tirer une boule de U_1 et on la met dans U_2 puis on tire une boule de U_2

On considère les évènements suivants ;

R_1 « La boule tirée de U_1 est rouge »

R_2 « La boule tirée de U_2 est rouge »

A « il n'y a plus de boule rouge dans U_2 à la fin de l'épreuve »

a) En utilisant un arbre de probabilité calculer

R_2 sachant R_1 $\quad$ $P_{R_1}(R_2)$

$P(R_1)$; $P(R_2/R_1)$; $P(R_2/\bar{R}_1)$; $P(R_1/R_2)$ et $P(R_2)$

b) Montrer que $P(A) = \frac{1}{5}$

2) On répète l'épreuve précédente, n fois de suite dans les mêmes conditions et on appelle la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois où A est réalisé

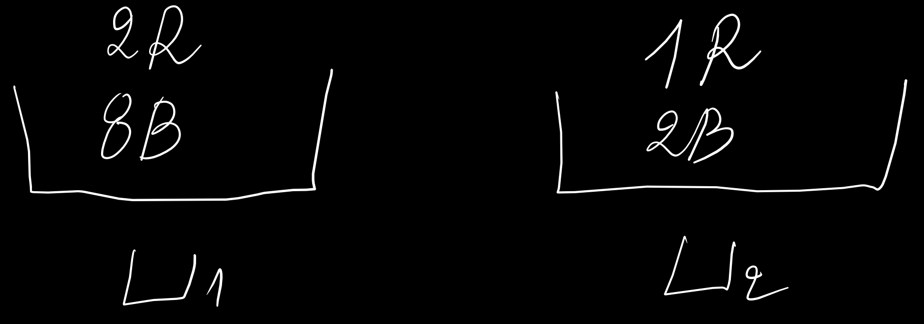
a) Déterminer la loi de probabilité de X

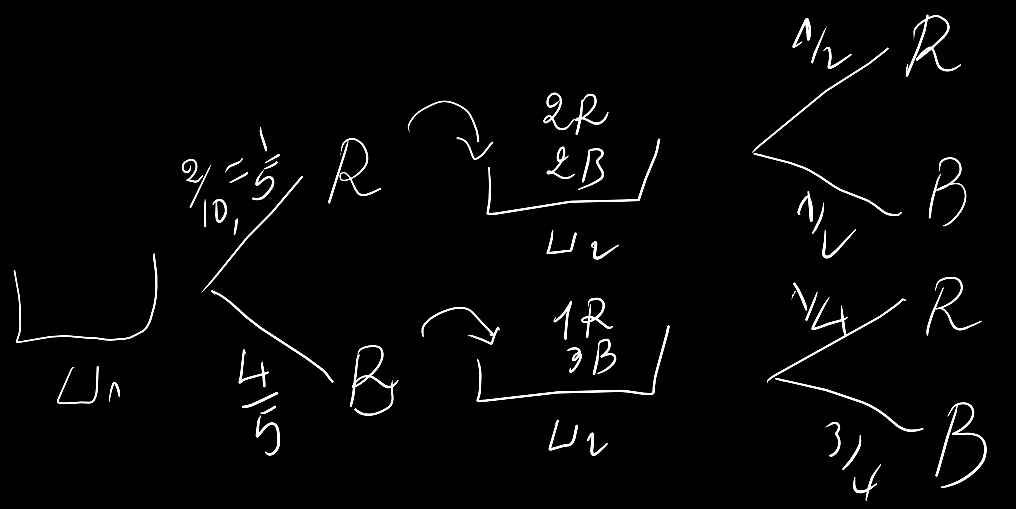
b) Calculer E(X) et V(X)

c) On note P_n la probabilité que l'évènement A soit réalisée au moins une fois. Déterminer la valeur minimale de n pour que $P_n \geq 0,9$

(5h30)

Mercredi Matin





ⓐ $P(R_1) = \frac{1}{5}$, $P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2}$

$P_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{1}{4}$

$P_{R_2}(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}}$