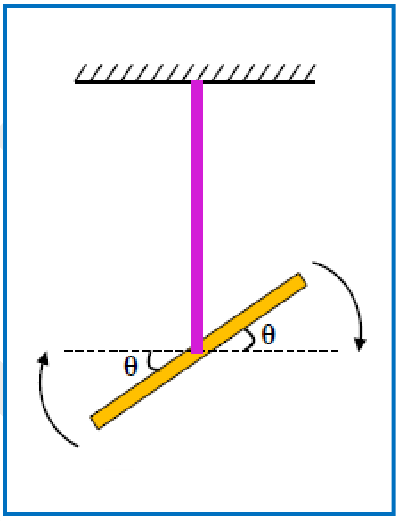
Pendule de torsion

I- Etude théorique du pendule de torsion :

1) Moment du couple de torsion:

Le moment, du couple de torsion exercé par le fil tordu, est proportionnel à l'angle θ . il est donné par :



$$\boxed{\mathcal{M}_T = -C.\theta} \quad (N.m)$$

Avec :

C : Constante de torsion du fil $(N.m.rad^{-1})$;

θ : Angle de torsion (rad).

2) Etude dynamique:

On considère un pendule de torsion, constitué d'un corps solide (une barre (B) ou un disque (D) ou un cylindre (C)) de masse m, attaché en son centre G d'un fil de torsion de masse négligeable .

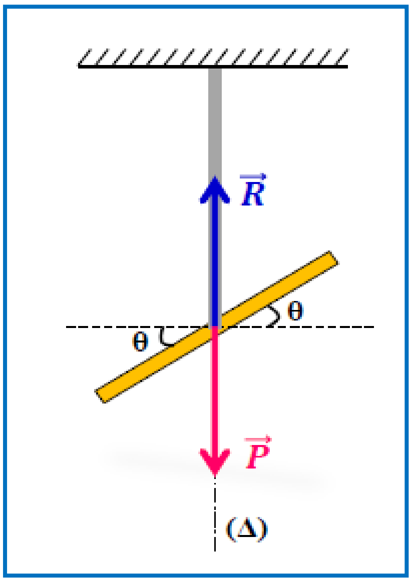
Ecartons le solide de sa position d'équilibre horizontalement d'un angle θ_m et lâchons-le sans vitesse initiale,

a- Equation différentielle du mouvement :

→ Bilan de forces :

*) Le système étudie : {solide (S)}.

- $\vec{P}$: le poids ;
- $\vec{R}$: l'action du fil ;
- l'action du couple de torsion, de moment : $\mathcal{M}_T$.



→Appliquant la relation fondamentale de la dynamique:

$$\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$\Longrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_T = J_\Delta.\ddot{\theta}$;

Et on a :

$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) = \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{R}\right) = 0$; car les lignes d'actions de ces deux forces coupent l'axe de rotation (Δ) ;

Et : $\mathcal{M}_T = -C.\theta$

$\Longrightarrow -C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$

D'où :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

Equation différentielle du mouvement

b- Solution de l'équation différentiel du mouvement:

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme :

$\theta(t) = \theta_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ où :

θ_m : l'amplitude des oscillations (la valeur maximale atteinte par θ), en (rad) ;

T_0 : la période propre des oscillations, en (s) ;

$\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$: la phase des oscillations à l'instant t, en (rad) ;

φ : la phase des oscillations à l'instant $t = 0$, en (rad) ;

On peut définir aussi :

$f_0 = \frac{1}{T_0}$: la fréquence propre des oscillations, en (Hz) ;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$:la pulsation propre des oscillations, en $(^{rad}/_{s})$.

c- Expression de la période propre T_0 :

On a : $\theta(t) = \theta_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

Donc : $\dot{\theta} = -\theta_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

Et $\ddot{\theta} = -\theta_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta(t)$

Puis on remplace dans l'équation différentielle :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\theta(t) + \frac{C}{J_\Delta}.\theta(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{+}\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.\cancel{\theta(t)} = \cancel{+}\ \frac{C}{J_\Delta}.\cancel{\theta(t)}$$

Donc : $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{C}{J_\Delta}$ c.à.d : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

D'où :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}\ (s)$$

d- Expression de la pulsation propre ω_0 :

On sait que : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ *et on a :* $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$

Donc : $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}}$

D'où : $\omega_0 = \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$

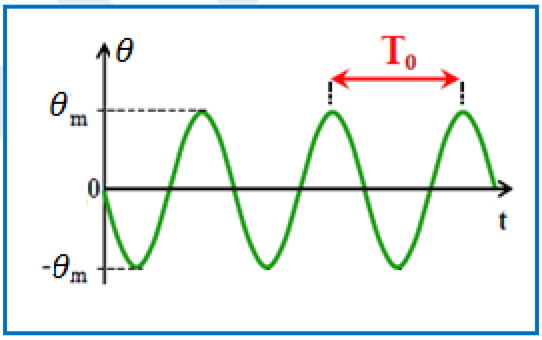
Remarque :

L'équation différentielle précédente peut mettre alors sous la forme :

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2.\theta = 0}$$

e- Détermination de φ :

On considère la courbe ci-contre qui représente un exemple de variation de l'angle θ en fonction du temps t:



- *Pour déterminer φ on utilise les conditions initiales* $(t = 0)$, *de l'abscisse angulaire* $\theta(t)$ *et de la vitesse angulaire* $\dot{\theta}(t)$;

  - *Pour* $\theta(t)$ *:*

On sait que : $\theta(t) = \theta_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

A $t = 0$, *on a :* $\theta(t = 0) \underset{\text{Théoriquement}}{=} -\theta_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).cos(\varphi) \underset{\text{Graphiquement}}{=} 0$

$$\Longrightarrow cos(\varphi) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

  - *Pour* $\dot{\theta}(t)$ *:*

On a : $\theta(t) = \theta_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(t) = -\theta_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

A $t = 0$, *on a :* $\dot{\theta}(t = 0) = -\theta_m.\left(\frac{2\pi}{T_0}\right).\sin(\varphi) < 0$

Théoriquement *Graphiquement*

(car $\theta(t)$ *est une fonction décroissante à t=0)*

donc : $\sin(\varphi) > 0$

d'où : $\varphi = \frac{\pi}{2}$

II- Etude énergétique d'un pendule de torsion:

1) Travail du couple de torsion :

Le travail du couple de torsion W_{CT} *appliquée par le fil sur un corps solide* (S) *lié au fil lors d'un déplacement du corps de la position* (A), *d'abscisse angulaire* θ_A, *à la position* (B), *d'abscisse angulaire* θ_B, *est donné par :*

$$\boxed{W_{CT} = \frac{1}{2}.C.({\theta_A}^2 - {\theta_B}^2)} \quad (J)$$

2) Energies du système:

a- Energie cinétique du système :

L'énergie cinétique du pendule de torsion est l'énergie cinétique du corps solide lié au fil. Elle est donnée par :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2} \quad (J)$$

b- Energie potentielle de torsion du système :

L'énergie potentielle de torsion d'un pendule de torsion est l'énergie que possède ce pendule lorsque le fil est tordu. Elle est donnée par :

$$\boxed{E_{pt} = \frac{1}{2}.C.\theta^2 + Cte} \quad (J)$$

Avec ;

Cte *: est une constante qui dépend du choix de l'état de référence de l'énergie potentielle de torsion ;*

Remarque :

On choisit l'état de référence, de l'énergie potentielle de torsion, l'état d'abscisse angulaire $\theta = 0$ *(position d'équilibre stable), c-à-d :* $E_{pt}(\theta = 0) = 0$ *, alors :* $Cte = 0$.

c-Energie mécanique du système :

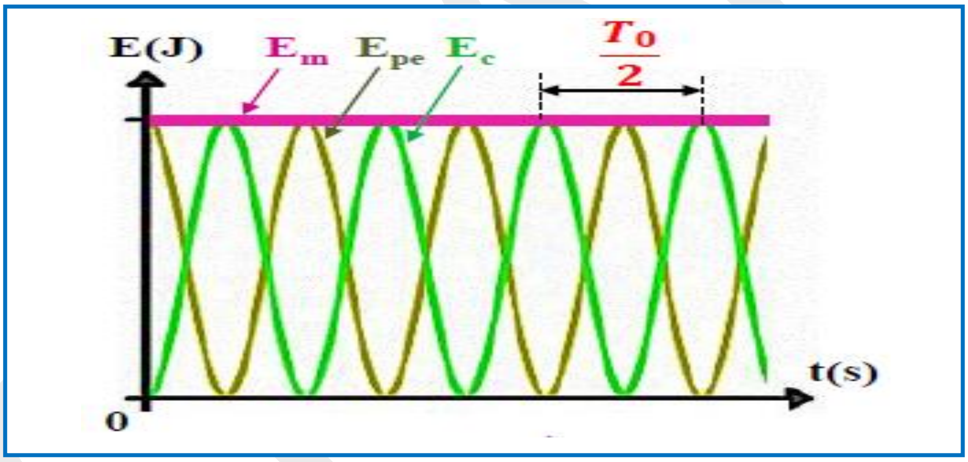
L'énergie mécanique du pendule de torsion, est la somme de son énergie cinétique E_C *et son énergie potentielle de torsion* E_{pt} *:*

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2} \quad (J)$$

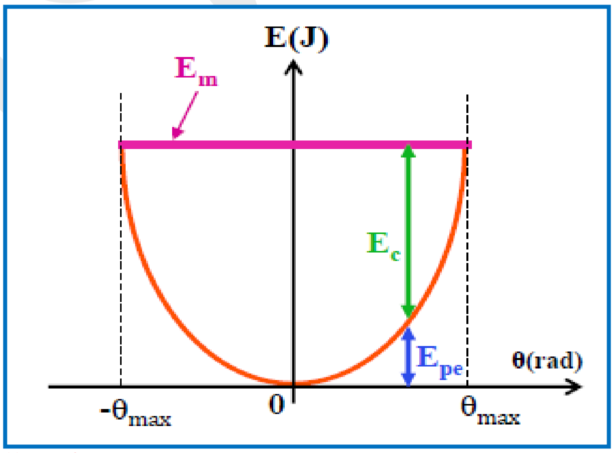
3) Cas de frottement négligeable :

L'amplitude des oscillations dans ce cas est constante, le régime est périodique de période propre T_0. *L'énergie mécanique du système se conserve :*

a- Courbes énergétiques :



b- Diagrammes énergétiques :



Remarque :

*)Equation différentielle du mouvement à partir d'une étude énergétique :

Frottement négligeable ↔ L'énergie mécanique du système se conserve $(E_m = Cte)$:

$\Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$ *et comme :* $E_m = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.C.\theta^2$

Alors : $\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta.\ddot{\theta}.\cancel{\dot{\theta}} + C.\cancel{\dot{\theta}}.\theta = 0$

$\Longrightarrow J_\Delta.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$

D'où :
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}.\theta = 0}$$

*)Expression de la vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{max}$:

On a : $\begin{cases} E_m = E_{Cmax} + 0 = \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2{}_{max} \\ E_m = 0 + E_{ppmax} = \frac{1}{2}.C.\theta^2{}_m \end{cases}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}.J_\Delta.\dot{\theta}^2{}_{max} = \frac{1}{2}.C.\theta^2{}_m$

D'où :
$$\boxed{\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}.\theta_m}$$

4) Cas de frottement non négligeable :

Dans ce cas, l'amplitude des oscillations décroit au cours du temps, le régime est pseudopériodique de période propre T (voir apériodique si les frottement sont importants). L'énergie mécanique du système diminue au cours du temps, elle est dissipée par transfert thermique :

*) Courbes énergétiques :