Simili de mathématiques : 2017/2018

Durée : 4h

NB :

⋆ ***l'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit .***

⋆ ***Les élèves sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l' appréciation des copies .***

Exercice 1 (**5 pts**) .

Soit $a \in [\![1,5]\!]$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des entiers naturels qui s'écrivent dans le système de numération à base 6 par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad u_n = \underbrace{\overline{aa\cdots a}}_{n\,fois}{}_{(6)}$$

1. *Déterminer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a.* ....0.75 pt

2. **(a)** *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 5u_n = a\,(6^n - 1)$* ....0.25 pt

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $6^n x - 5y = a \qquad (E)$.*
Résoudre l'équation (E). ....0.5 pt

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $u_n \equiv 0 \quad [7]$ si et seulement si n est pair.* ....0.5 pt

4. *Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors u_m divise u_n.* ....0.5 pt

5. *Dans cette question, on prend $a = 1$.*

(a) *Montrer que si u_n est premier alors n est premier.* ....0.5 pt

(b) *Calculer u_5. Le nombre u_5 est-il premier ? Conclure.* ....0.5 pt

6. **(a)** *Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_{n+1} = u_n + a \cdot 6^n$.* ....0.25 pt

(b) *Montrer que les nombres 6^n et $\sum_{k=0}^{n-1} 6^k$ sont premiers entre eux.* ....0.25 pt

(c) *En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n \wedge u_{n+1} = a$.* ....0.25 pt

(d) *Soit p un nombre premier avec $p \geqslant 7$. On considère le système dans $\mathbb{Z}^2$:*

$$u_{n+1}x + u_n y = p \qquad (F)$$

Pour quelles valeurs de a , l'équation (F) admet des solutions.
Résoudre l'équation (F) dans le cas où $a = 1$. ....0.75 pt

---

Exercice 2 (4.75 pts) .

On rappelle que $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ *est un anneau unitaire d'unité :* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie I

On considère l'ensemble $G = \mathbb{R} \backslash \{1\}$. *On pose pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$a \star b = a + b - ab \quad et \quad a \top b = a + b - 1$$

1. *Montrer que* $\star$ *est une loi de composition interne sur G, et que* $\top$ *est une loi de composition interne sur* $\mathbb{R}$. .... 0.5 pt

2. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \longmapsto 1 - x$.

- **(a)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *dans* $(G, \star)$ .... 0.5 pt
- **(b)** *Montrer que f est un isomorphisme de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $(\mathbb{R}, \top)$ .... 0.5 pt
- **(c)** *En déduire la structure* $(G, \star)$, *et l'inverse de tout élément a de* $(G, \star)$. .... 0.5 pt

3. *Montrer que* $(]-\infty, 1[, \star)$ *est un sous groupe du groupe* $(G, \star)$. .... 0.5 pt

4. *Montrer que* $(\mathbb{R}, \top, \star)$ *est un corps commutatif.* .... 0.5 pt

5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in G$. *On pose :* $a^{(n)} = \underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n\, fois}$.

Déterminer $a^{(n)}$ *en fonction de a et de n.* .... 0.25 pt

Partie II

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ M(a) \quad | \quad M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad avec \quad a \in G \right\}$$

1. *Montrer que l'ensemble E est stable dans* $(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \times)$. .... 0.25 pt

2. *Montrer que* $(E, \times)$ *et* $(G, \star)$ *sont isomorphes. En déduire la structure de* $(E, \times)$. .... 0.5 pt

3. *Calculer* $(M(a))^n$ *en fonction de a et de n.* .... 0.25 pt

4. *On pose* $F = \{M(a) \qquad a < 1\}$. *Montrer que F est un sous groupe* $(E, \times)$. .... 0.5 pt

---

Exercice 3 (7.25 **pts)** .

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ *par :*

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Partie I

1. *Calculer* $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et donner les interprétations géométriques de ces deux limites.* .... 0.5 pt

2. **(a)** *Montrer que pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a :*

$$0 \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt \leqslant x\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

.... 0.5 pt

(b) *Montrer que pour tout $t \in I$ on a :* $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + \dfrac{t^2}{1+t}$ .... 0.25 pt

(c) *En déduire que :* $\forall x \in I \setminus \{0\}\,;\quad f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$ .... 0.25 pt

(c) *Montrer que la fonction f est dérivable en 0, et étudier la position relative entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse 0.* .... 0.5 pt

3. **(a)** *Etudier les variations de la fonction $u : x \longmapsto x - (1+x)\ln(1+x)$, et déterminer son signe.* .... 0.5 pt

(b) *Etudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I, et donner son tableau de variation.* .... 0.5 pt

(c) *Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0, dans un repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. .* .... 0.5 pt

Partie II

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

1. *Montrer que $D_F = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.* .... 0.5 pt

2. *Montrer que :* $\forall x > 0;\quad \dfrac{\ln(2x+1)}{2} \leqslant F(x) \leqslant \ln(x+1)$, *et déterminer la nature de la branche infinie à la courbe $\mathscr{C}_F$ au voisinage de $+\infty$.* .... 0.5 pt

3. *Montrer que la fonction F est dérivable sur D_F, et calculer sa dérivée et donner ses variations.* .... 0.75 pt

4. *Montrer que :* $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[\,;\quad \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln(t+1)}{x} \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{\ln(t+1)}{2x}$ .... 0.5 pt

5. *On suppose que la fonction F admet une limite l au point $-\frac{1}{2}$ avec $l \in \mathbb{R}$.*

Calculer pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \ln(1+t)\,dt$, *en déduire que :* $-1 - \ln 2 \leqslant l \leqslant \dfrac{-1-\ln 2}{2}$ .... 0.5 pt

Partie III

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = F(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$. .... 0.5 pt

2. *Montrer que la suite* $(u_n)_n$ *est strictement décroissante et déterminer sa limite.* .... 0.5 pt

---

Exercice 4 (3 **pts**) .

Soit $\theta \in]0, \pi[$. *On considère dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

$$z^3 + (4\cos(\theta) - 2)z^2 + (4 - 8\cos(\theta))z - 8 = 0 \qquad (E)$$

1. **(a)** *Montrer que l'équation* (E) *admet une solution réelle qu'on déterminera.* .... 0.5 pt

(b) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) . ... 0.5 pt

2. *Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal directe* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère les points d'affixes $A(2)$ *;* $B(-2e^{i\theta})$ *et* $C(-2e^{-i\theta})$.

(c) *Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre le point A est d'angle* $\frac{\pi}{3}$. .... 0.25 pt

(b) *En déduire les valeur de* θ *pour que le triangle ABC soit équilatéral direct.* .... 0.5 pt

(d) *Soient E le milieu de* $[AB]$ *et F le milieu de* $[AC]$. *Déterminer* z_E *et* z_F *les affixes des points E et F respectivement.* .... 0.5 pt

(e) *Montrer que les points : A, O, E et F sont cocycliques* .... 0.75 pt

---