Exercice 10 : (EXAMEN 2023 ORDINAIRE)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

- A :"la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 »
- B: "le produit ab est égal à 2"

1) a) Calculer $p(A)$ la probabilité de l'événement A

   b) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

2) Calculer $p(A/B)$ probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

   a) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

   b) Donner la loi de probabilité de X

   (Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

   c) On considère les événements

   - M : " Le produit ab est pair non nul "
   - N : " le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables

Exercice 10 : (EXAMEN 2023 ORDINAIRE)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres : 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire suivante :

« On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte ».

On considère les événements suivants :

- A :"la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 »
- B: "le produit ab est égal à 2"

1) a) Calculer $p(A)$ la probabilité de l'événement A

b) Montrer que $p(B) = \frac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

2) Calculer $p(A/B)$ probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

a) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{3}$

b) Donner la loi de probabilité de X

(Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

c) On considère les événements

- M : " Le produit ab est pair non nul "
- N : " le produit ab est égal à 1 "

Montrer que les événements M et N sont équiprobables

Problème (8,5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln(x)(-2+\ln(x)) \ ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1cm$

0,75 1. Vérifier que $x\ln^2(x) = 4\left(\sqrt{x}\,\ln(\sqrt{x})\right)^2$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2(x) = 0$

0,5 2. Montrer que f est continue à droite en 0

0,75 3. Monter que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

0,75 4. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ puis montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique d'une direction asymptotique que l'on déterminera .

0,5 5. a)Montrer que $f'(x) = \ln^2(x) - 2$ pour tout x appartenant à l'intervalle$]0,+\infty[$

0,75 b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f

On admet que : $f\left(e^{-\sqrt{2}}\right) = 1{,}2$ et $f\left(e^{\sqrt{2}}\right) = -3{,}2$

0,75 6. Montrer que (C) admet un seul point d'inflexion $I(1;0)$ et donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point I

0,5 7. a)Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses sur $]0,+\infty[$ en deux points à déterminer

1 b)Construire, dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (T) et la courbe (C)

On admet que : $e^{-\sqrt{2}} = 0{,}3$ et $e^{\sqrt{2}} = 4{,}1$

,75 8. a)Montrer que $H : x \mapsto \frac{1}{4}(2x^2\ln(x) - x^2)$ est une primitive de la fonction $h: x \mapsto x\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ puis montrer que $\int_1^{e^2} x\ln(x)dx = \frac{3e^4+1}{4}$

75 b)En utilisant une intégration par parties montrer que $\int_1^{e^2} x\ln^2(x)dx = \frac{5e^4-1}{4}$

75 c)Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe (C) ,l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$

Exercice 3 (2.5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$u_1 = 1 \quad et \quad (\forall n \in IN^*)\ u_{n+1} = (1-\sqrt{2})u_n + 2\sqrt{2}$$

0.5 1. *Calculer u_2 et u_3*

2. *Soit $v_n = u_n - 2$ pour tout $n \in IN^*$*
   a) *Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant la raison et le 1^{er}terme*
   b) *Exprimer v_n puis u_n en fonction n*
   c) *Calculer la limite de la suite (u_n)*

3. *On pose $w_n = e^{3u_n - 5}$ pour tout $n \in IN^*$. Calculer $\lim w_n$*

4. *Calculer en fonction de n la somme S_n définie par : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.*

Exercice4 (3 points)

Une urne contient 4 jetons rouges et 3 jetons noirs et 2 jetons verts

(Les jetons sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard et simultanément trois jetons.

1. *On considère les deux événements suivants A et B*
   A : *"avoir exactement deux couleurs"*
   B : *" avoir un seul jeton vert "*
   a) *Calculer $p(A)$ et $p(B)$*
   b) *Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{3}{14}$ et calculer : $p(A \cup B)$*
   c) *A et B Sont-ils indépendants ? justifier la réponse.*
2. *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs des jetons tirés pendant chaque tirage simultané.*
   a) *Montrer que : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$*
   b) *Déterminer la loi de la probabilité de X et calculer $E(X)$.*

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points

$A(1;2;3)$ et $B(2;1;3)$ et $C(3;1;2)$

(S) est la sphère de centre de $\Omega(2;2;0)$ et de rayon $2\sqrt{3}$.

0,5 1.a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

0,25 b) Vérifier que $x + y + z - 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,75 c) Déterminer une équation de chacun des 2 plans tangents à (S) et parallèles à (ABC)

2. soit (P) un plan d'un vecteur normal $\vec{n}(1;0;-1)$ et passant par A

0,75 a) Montrer que (ABC) et (P) sont sécants suivant une droite (D) d'un vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;1)$

0,25 b) Déduire qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+2 \\ z = t+3 \end{cases}$ $(t \in IR)$

0,5 3. Montrer que (D) coupe (S) en deux points I et J en déterminant leurs coordonnées

Exercice 2 (3 points)

Le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

1. On considère les points A et B d'affixes respectivement :

$a = -1 - i$ et $b = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

0,5 a) Ecrire a sous une forme trigonométrique et b sous la forme algébrique

0,25 b) Vérifier que : $a^{2024} \in IR$

2. Soient : $C(c)$ l'image du point B par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

$D(d)$ l'image du point B par l'homothétie h de centre A et de rapport 2

$E(m)$ l'image du point B par la translation t du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

0,75 a) Montrer que : $c = -1 - \sqrt{3}$; $d = -1 + 3i$ et $m = -\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

0,25 b) Vérifier que E est le milieu de $[DC]$

0,5 c) Montrer que $\frac{c-a}{c-b} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déduire la nature du triangle ABC

3. Soit M un point d'affixe z différent de O

0,5 a) Montrer que $\left(z - \frac{1}{z}\right) \in iIR \iff z + \bar{z} = 0$ ou $z\bar{z} = 1$

0,25 b) Déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $\left(z - \frac{1}{z}\right) \in iIR$.